פתרון משוואות ממעלה שנייה ויותר בשיטת ההצבה

כאשר מקבלים משימה "פתור את המשוואה: $t^2-6t+8=0$ " , קל לבצע אותה ומקבלים את התשובות $t=2$ או $t=4$.

אבל כאשר מתבקשים לפתור את המשוואה: $(x^2-3x+2)^2-6(x^2-3x+2)+8=0$, נטייה ראשונה היא פתיחת סוגריים, אך מיד מתברר שצעד זה לא יוביל לפתרון.

רק לאחר התבוננות של כמה שניות במשוואה הנתונה, שמים לב שאם נחליף את הביטוי x^2-3x+2 במשתנה אחר, למשל t, נקבל את המשוואה $t^2-6t+8=0$ המוכרת לנו. לאחר פתרון משוואה זו, מה שנשאר זה לעשות הוא להציב הצבה הפוכה ולפתור את שתי המשוואות הריבועיות הבאות:

$$x^2-3x+2=2 \qquad \text{או} \qquad x^2-3x+2=4$$

מקבלים:

$$x^2-3x=0 \qquad\qquad x^2-3x+2=0$$
$$x(x-3)=0 \qquad\qquad (x-2)(x-1)=0$$
$$x=0 \;\text{ או }\; x=3 \qquad\qquad x=1 \;\text{ או }\; x=2$$

זאת אומרת שלמשוואה $(x^2-3x+2)^2-6(x^2-3x+2)+8=0$, יש 4 פתרונות: $x=3$, $x=2$, $x=1$, $x=0$

<u>הערה:</u> למשוואה ממעלה n, יש לכל היותר n פתרונות.

שיטה זאת לפתרון משוואות ממעלה יותר גדולה מ- 2 נקראת **שיטת ההצבה** .

<u>דוגמאות</u>

1. פתור את המשוואה: $3x^4-10x^2+3=0$

<u>פתרון:</u>

נסמן: $x^2=t$ ונקבל את המשוואה הריבועית $3t^2-10t+3=0$.

$$3t^2-9t-t+3=0$$
$$3t(t-3)-(t-3)=0$$
$$(t-3)(3t-1)=0$$
$$t=3 \;\text{ או }\; t=\frac{1}{3}$$

כעת נציב במקום t את x^2 ונקבל: $x^2=3 \Leftarrow x=\pm\sqrt{3}$ או $x^2=\frac{1}{3} \Leftarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

2. פתור את המשוואה: $(x^2+x)(x^2+x-11)=12$.

<u>פתרון:</u>

נסמן: $x^2+x=t$ ונקבל: $t(t-11)=12$

$$t^2-11t-12=0$$
$$(t-12)(t+1)=0$$
$$t=12 \quad \text{או} \quad t=-1$$

כעת נציב במקום t את x^2+x ונקבל:

$x^2+x=12$		$x^2+x=-1$
$x^2+x-12=0$	או	$x^2+x+1=0$
$(x+4)(x-3)=0$		$\Delta=1-4<0$
$x=3$ או $x=-4$		אין פתרון

לכן למשוואה הנתונה יש רק 2 פתרונות: $x=3$ או $x=-4$.

3. פתור את המשוואה: $x(x+6)(x+3)^2=400$

<u>פתרון:</u>

$$x(x+6)(x+3)^2=400$$
$$(x^2+6x)(x^2+6x+9)=400$$

נסמן: $x^2+6x=t$ ונקבל:

$$t(t+9)=400$$
$$t^2+9t-400=0$$
$$\Delta=81+1600=1681$$
$$t=\frac{-9\pm\sqrt{1681}}{2}=\frac{-9\pm 41}{2}$$
$$t=16 \quad \text{או} \quad t=-25$$

נציב במקום t את x^2+6x ונקבל:

$x^2+6x=16$		$x^2+6x=-25$
$x^2+6x-16=0$	או	$x^2+6x+25=0$
$(x+8)(x-2)=0$		$\Delta=36-100<0$
$x=2$ או $x=-8$		אין פתרון.

לכן גם בתרגיל זה יש רק 2 פתרונות: $x=2$ או $x=-8$.

פתרון וחקירת משוואות ומערכות משוואות ליניאריות עם פרמטרים

פתרון משוואות ליניאריות עם פרמטרים:

<u>דוגמה 1</u>

פתור את המשוואה: $8(x+a)-3(x-3)=x+4a+1$

נפתח סוגריים ונרכז את הביטויים עם x באגף אחד ואת שאר הביטויים באגף השני:

$$8(x+a)-3(x-3)=x+4a+1$$
$$8x+8a-3x+9=x+4a+17$$
$$4x=8-4a$$

נבודד את x : $x=\dfrac{8-4a}{4} \Rightarrow \quad x=2-a$

ביטאנו את x באמצעות הפרמטר a ומספרים.

<u>דוגמה 2</u>

פתור את המשוואה: $a^2(x-2)=x+2a$

נבצע את השלבים כמו בדוגמה הקודמת:

$$a^2x-x=2a^2+2a$$
$$(a^2-1)x=2a^2+2a$$

נקבל: $(a-1)(a+1)x=2a(a+1)$ או $x=\dfrac{2a(a+1)}{(a+1)(a-1)}$

למשוואה יש פתרון יחיד בתנאי ש- $a\neq -1$, $a\neq 1$. בתנאי זה נוכל לצמצם ולקבל: $x=\dfrac{2a}{a-1}$

כאשר נציב במשוואה $x(a-1)(a+1)=2a(a+1)$ את הערך $a=1$ נקבל $0\cdot x=4$, וזוהי משוואה שאין לה פתרון.

כאשר נציב במשוואה $x(a-1)(a+1)=2a(a+1)$ את הערך $a=-1$ נקבל $0\cdot x=0$, וזוהי משוואה שיש לה אינסוף פתרונות, כלומר x יכול לקבל כל ערך (פרט ל -1)

לסיכום:

כאשר $a=1$ למשוואה אין פתרון. (מקבלים $0\cdot x=2$)

כאשר $a=-1$ למשוואה אינסוף פתרונות. (מקבלים $0\cdot x=0$)

כאשר $a\neq -1$, $a\neq 1$ למשוואה פתרון יחיד $x=\dfrac{2a}{a-1}$.

<u>המשמעות של פתרון יחיד היא שעבור לערך מסוים של a פרט ל- $a=1$ ו- $a=-1$, יתקבל ערך יחיד ל-x.</u>

באופן כללי, כאשר מגיעים בתהליך הפתרון לאחר פישוט וסידור אגפים, למשוואה מהסוג: $Ax = B$, ומשם למשוואה $x = \frac{B}{A}$:

א. אם $A \neq 0 , B \neq 0$ למשוואה יש פתרון יחיד.

ב. אם $A = 0 , B \neq 0$ למשוואה אין פתרון (כי לא ייתכן $0 \cdot x \neq 0$).

ג. אם $A = 0 , B = 0$ למשוואה יש אינסוף פתרונות (כי $0 \cdot x = 0$ מתקיים עבור אינסוף ערכים של x).

פתרון מערכת משוואות ליניאריות עם פרמטרים:

רמה ראשונה: ברמה זו מופיעים פרמטרים שאינם מוגבלים בערכים מסויימים. מכאן שהפתרון אינו דורש חקירה.

דוגמה: פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7a \\ x - 2y = -7a \end{cases}$$

נפתור באמצעות השוואת מקדמים:

$$\begin{cases} 2x+3y=7a \\ x-2y=-7a \end{cases} \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$+\begin{cases} 2x+3y=7a \\ -2x+4y=14a \end{cases}$$

$$7y=21a$$

$$\boxed{y=3a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x=-a}$$

מסקנה: קיים פתרון יחיד, הישרים נחתכים בנקודה $(-a,3a)$

רמה שנייה: ברמה זו מופיעים פרמטרים המוגבלים בערכים מסויימים.

דרך פתרון ראשונה: אנו פותרים את המערכת וקובעים, במהלך הפתרון, תחומי הגדרה לפרמטרים. בסוף הפתרון, אנו בודקים על-ידי הצבה, מה קורה בערכים שפסלנו בדרך.

דוגמה: פתור את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x + a y = a^2 \\ x + 2y = 5a - 6 \end{cases}$$

נפתור באמצעות השוואת מקדמים:

$$-\begin{cases} x+ay=a^2 \\ x+2y=5a-6 \end{cases}$$

$$(a-2)y=a^2-5a+6 \qquad \Big|:(a-2) \qquad \boxed{a\neq 2}$$

$$y=\frac{(a-2)(a-3)}{(a-2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=a-3}$$

$$x+a(a-3)=a^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3a}$$

כלומר: אם $a\neq 2$ קיים פתרון יחיד והוא: $(3a,a-3)$.

נותר לבדוק מה קורה אם $a=2$, נציב במערכת המקורית ונבחן את התוצאה:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת משוואות שקולות ומכאן שיש אינסוף פתרונות עבור $a=2$.

<u>יש להדגיש</u> : קיימים אינסוף פתרונות, אבל לא כל פתרון מתאים, אלא רק פתרונות המתאימים לתבנית מסויימת.

למציאת הפתרון הכללי, נבחר פרמטר לייצוג ערכו של x. למשל: $x=t$. על-ידי הצבה במערכת שקיבלנו קל לראות כי $y=2-\frac{1}{2}t$ ולכן הפתרון הכללי $\left(t\,,2-\frac{1}{2}t\right)$.

פתרון כללי זה מאפשר למצוא אינסוף פתרונות על-ידי בחירה אקראית של t. למשל:

$$t=1 \quad \Rightarrow \left(1,1\frac{1}{2}\right)$$

$$t=4 \quad \Rightarrow (4,0)$$

$$t=-2 \quad \Rightarrow (-2,3)$$

דרך פתרון שנייה: דרך זו מתאימה לשאלות בהן מתבקשת רק חקירה ללא מתן הפתרון .

<u>**דוגמה 1**</u>

מצא לאילו ערכים של m יש למערכת: $\begin{cases} m^2x+y=m \\ 9x+y=-3 \end{cases}$

א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

היות ולא התבקשנו להציג את הפתרון, מספיק אם נבצע חקירה.

<u>תזכורת</u>: אם למערכת משוואות ליניאריות אין פתרון, המשמעות היא כי הישרים המיוצגים על ידי המשוואות, מקבילים.

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$$

באופן כללי, אם נתונה המערכת: $\begin{cases} A_1x+B_1y=C_1 \\ A_2x+B_2y=C_2 \end{cases}$, ניתן לרשום את שתי המשוואות בצורה מפורשת:

$$\begin{cases} y=-\frac{A_1}{B_1}x+\frac{C_1}{B_1} \\ y=-\frac{A_2}{B_2}x+\frac{C_2}{B_2} \end{cases}$$

I) אם למערכת משוואות ליניארית יש פתרון יחיד, המשמעות הגרפית היא, ששני הישרים המיוצגים ע"י המשוואות נחתכים בנקודה אחת, לכן השיפועים שונים: $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$, כלומר $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

ולסיכום: $\boxed{\text{כאשר למערכת יש פתרון יחד: } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$.

II) אם למערכת משוואות ליניארית אין פתרון, המשמעות הגרפית היא, ששני הישרים המיוצגים ע"י המשוואות מקבילים ולא מתלכדים, לכן השיפועים שווים: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, כלומר $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, והפרמטרים החופשיים שונים : $\frac{C_1}{B_1} \neq \frac{C_2}{B_2}$,

כלומר $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

ולסיכום: $\boxed{\text{כאשר למערכת אין פתרון: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}$

III) אם למערכת משוואות ליניאריות יש אינסוף פתרונות, המשמעות הגרפית היא ששני הישרים מתלכדים, לכן השיפועים שווים: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, כלומר $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, והפרמטרים החופשיים שווים : $\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$, כלומר $\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

ולסיכום: $\boxed{\text{כאשר למערכת אינסוף פתרונות: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

למשל: $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4}x-2\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-4y=10 \\ 6x-8y=20 \end{cases}$

נחזור לתרגיל שלנו: יש לחקור את המערכת הבאה: $\begin{cases} m^2x+y=m \\ 9x+y=-3 \end{cases}$

נבדוק, תחילה, מתי יש מצב קיצוני : $\frac{m^2}{9}=\frac{1}{1}$. הפתרון מוביל לכך ש: $m=\pm 3$.

נבדוק כל אחר מהערכים שקיבלנו:

$m=3 \quad \Leftarrow \quad \frac{9}{9}=\frac{1}{1}\neq\frac{3}{-3}$ מכאן שאין פתרון למערכת.

$m=-3 \quad \Leftarrow \quad \frac{9}{9}=\frac{1}{1}=\frac{-3}{-3}$ מכאן שלמערכת יש אינסוף פתרונות.

כמו-כן ברור כי אם $m\neq\pm 3$ קיים פתרון יחיד למערכת.

<u>דוגמה 2</u>

נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2m-3)x-my=m-2 \\ 5x-(2m+3)y=3 \end{cases}$

קבעו לאילו ערכי m יש למערכת: א. פתרון יחיד ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון.

פתרון: היות ולא נתבקשנו לפתור את המערכת, נסתפק בחקירתה. מתקבל מצב קיצוני כאשר:

$$\frac{2m-3}{5}=\frac{-m}{-(2m+3)}$$

כעת נקבע את תחום הגדרה: $m\neq -1\frac{1}{2}$, נבדוק אותו בסוף.

פתרון המצב הקיצוני הוא: $4m^2-9=5m$

$$4m^2-5m-9=0$$

$$(m+1)(4m-9)=0$$

$$\boxed{m_1=-1} \qquad \boxed{m_2=2\frac{1}{4}}$$

נבדוק על-ידי הצבה במקור:

אם $m=-1$ היחס שנקבל הוא: $\frac{-5}{5}=\frac{1}{-1}=\frac{-3}{3}$ כלומר: ישנם אינסוף פתרונות.

אם $m=2\frac{1}{4}$ היחס שנקבל הוא: $\frac{\frac{1}{4}}{3} \neq \frac{-2\frac{1}{4}}{-7\frac{1}{2}} = \frac{1\frac{1}{2}}{5}$ כלומר: אין פתרון למערכת.

נותר לבדוק $m=-1\frac{1}{2}$. נציב במערכת המקורית ונקבל: $\begin{cases} -6x+1\frac{1}{2}y=-3\frac{1}{2} \\ 5x=3 \end{cases}$ ברור כי קיים פתרון יחיד.

לסיכום:

א. קיים פתרון יחיד אם $m \neq -1$ וכן $m \neq 2\frac{1}{4}$

ב. קיימים אינסוף פתרונות כאשר $m=-1$.

ג. אין פתרון כאשר $m=2\frac{1}{4}$.

נוסיף כי במצב של אינסוף פתרונות כאשר $m=-1$, נקבל $5x-y=3$ או $y=5t-3$ הפתרון הפרמטרי יהיה :

$(t,5t-3)$

הצעה לתרגול מספרי לימוד בנושא משוואות ריבועיות מיוחדות ומשוואות ומערכות עם פרמטרים

מחבר	ספר	עמוד	מס' תרגיל
יואל גבע ואריק דז'לדטי	מתמטיקה לתלמידי 5 יחידות לימוד תוכנית הבחנות החדשה שאלון 35806 כרך א	170	40, 43, 44
		171	60, 68, 69
		174	124, 128, 130
		178	14, 19, 20, 24
		186	18, 19
		190	18, 25, 38
		192	46, 52, 60, 67
גבי יקואל	מתמטיקה לתלמידי 5 יחידות לימוד תוכנית הבחנות החדשה שאלון 35806 כרך א	141	65, 67, 70
		179	2, 4, 8, 18
		76	4, 6, 10, 12, 14, 17, 18
		77	23, 24, 25, 30
בני גורן	מתמטיקה 4 ו-5 יחידות לימוד חלק א שאלונים 035806 ו-035804	94	58, 61, 63
		101	19, 21, 25
		102	37, 40, 42
		108	9, 15, 17, 24, 25
		109	1, 3, 9, 11